Prof. Dr. Alfred Toth

Die Abbildung von Peirce-Zahlen auf Trito-Zahlen

1. Kaehr (2012, S. 6) hatte folgende vier kombinatorischen Zahlen unterschieden

types \ values	aa	ab	ba	bb	Kombinatorik
Boolean	aa	ab	ba	bb	m^n
Mersennian	aa	ab	ba	–	$2^n - 1$
Brownian	aa	ab	–	bb	$\binom{n+m-1}{n}$
Stirling trito	aa	ab	–	–	$\sum_{k=1}^{M} S(n, k)$

Trito-Zahlen sind also Stirling-Zahlen 2. Art.

Die polykontexturalen (qualitativen) Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen werden nach Schadach (1967) definiert. Seien A und B zwei nichtleere endliche Mengen

$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$

$B = (b_1, b_2, ..., b_n)$.

B^A bezeichne die Menge aller Abbildungen μ von A auf B

$B^A = (\mu \mid \mu: A \rightarrow B)$.

Dann ist die Kardinalität von B^A

$\text{card } B^A = (\text{card } B)^{\text{card } A} = m^n$

Bezeichne $\backsim^p$ die Proto-Äquivalenz. Die Proto-Äquivalenz zweier Abbildungen μ_1 und μ_2 von B^A ist gegeben durch

DEFINITION 1: $\mu_1 \backsim^p \mu_2 \Leftrightarrow \text{card } A/\ker \mu_1 = \text{card } A/\ker \mu_2$.

Wie man leicht sieht, ist die Proto-Äquivalenz reflexiv, symmetrisch und transitiv. Damit wird B^A in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen partitioniert, deren Anzahl

$\text{card } B^A / \backsim^p = \min(\text{card } A, \text{card } B)$

ist.

Bezeichne $\backsim^d$ die Deutero-Äquivalenz.

DEFINITION 2: $\mu_1 \backsim^d \mu_2 \Leftrightarrow A/\ker \mu_1 \equiv A/\ker \mu_2$.

Offensichtlich ist die Deutero-Äquivalenz ebenfalls reflexiv, symmetrisch und transitiv. Ihre Anzahl ist

card $B^A / \backsim^d = \sum_{k=1}^{M} P(n,k)$,

darin M = min (card A, card B), n = card A, und P (n, k) = Anzahl der Partitionen von n in k ganzzahlige Summanden ohne Berücksichtigung der Ordnung.

Bezeichne $\backsim^t$ die Trito-Äquivalenz.

DEFINITION 3: $\mu_1 \backsim^t \mu_2 \Leftrightarrow A/\ker \mu_1 = A/\ker \mu_2$,

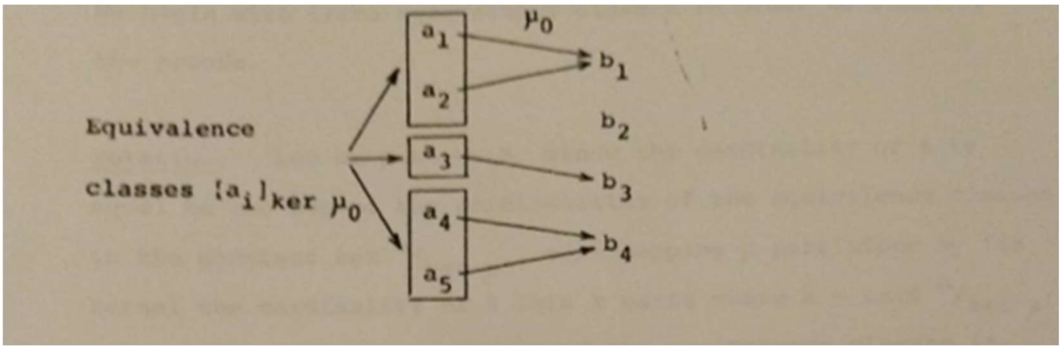
d.h. $(a_i)_{\ker \mu 1} = (a_i)_{\ker \mu 2}$ für alle $a_i \in A$.

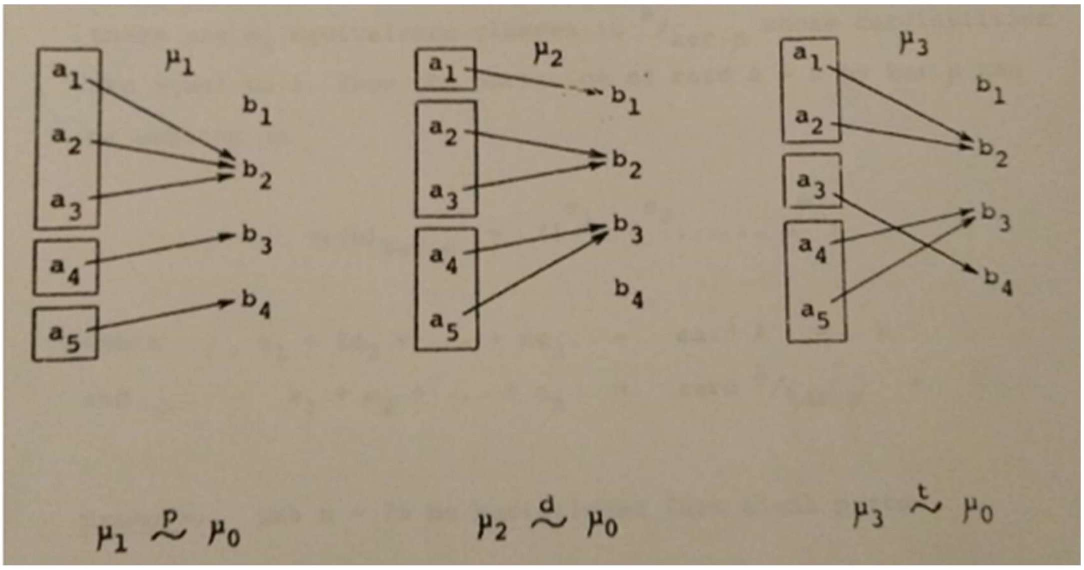
Auch die Trito-Äquivalenz ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. Somit wird B^A in disjunkte Teilmengen partitioniert, deren Anzahl gegeben ist durch

card $B^A / \backsim^t = \sum_{k=1}^{M} S(n,k)$,

darin M = min (card A, card B), n = card A, und S(n, k) = Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge von n Elementen in k nichtleere Teilmengen zu partitionieren. S (n, k) sind also die Stirling-Zahlen 2. Art.

Informell ausgedrückt, werden also bei Proto-Zahlen nur die verschiedenen Symbole, bei Deutero-Zahlen nur die verschiedenen und die gleichen Symbole und bei Trito-Zahlen die verschiedenen und die gleichen Symbole sowie deren Orte berücksichtigt. Vgl. dazu die folgende Tafel aus Schadach (1967, S. 10).





Wir können daher die Position der Trito-Zahlen im Rahmen der kombinatorischen Zahlen hinsichtlich Dualität, Gleichheit und Ort aus dem folgenden Schema bestimmen.

	Dualität	Gleichheit	Ort
Boole-Zahlen	+	+	—
Mersenne-Zahlen	+	—	—
Brown-Zahlen	—	+	—
Proto-Zahlen	—	—	—
Deutero-Zahlen	—	—	—
Trito-Zahlen	—	—	+

Die vollständige Negation in Bezug auf die drei qualitativen zahlentheoretischen Eigenschaften der Dualität, Gleichheit und des Ortes der Boole-Zahlen sind also nur die Proto- und die Deutero-Zahlen. Mersenne- und Brown-Zahlen verhalten sich selbst dual zueinander. Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen als Subspezifikationen der Stirling-Zahlen unterscheiden sich durch die Gleichheit und die Verschiedenheit von mehrdeutigen Zahlen, also durch eine Eigenschaft, die von den übrigen kombinatorischen Zahlen nicht geteilt wird. ORTSRELEVANT SIND NUR DIE TRITO-ZAHLEN. Sei N der Normalform-Operator, dann haben wir also z.B.

Proto-Zahlen	Deutero-Zahlen	Trito-Zahlen
N(0021) = (0012)	N(0022) = (0011)	N(3210) = (0123).

2. Die folgende Tabelle aus Günther (1971) zeigt die Trito-Zahlen der ersten 4 Kontexturen, d.h. für die Morphogramme der Länge (= Qualität) 1 bis 4, zusammen mit ihren binären und dezimalen Äquivalenten, die uns an dieser Stelle jedoch nicht interessieren.

morphograms	trito-numbers	binary equivalents	decimal equivalent
a	0	... 0 0	... 0 0
a a	0 0	... 0 0	... 0 0
a b	0 1	... 0 1	... 0 1
a a a	0 0 0	... 0 0	... 0 0
a a b	0 0 1	... 0 1	... 0 1
a b a	0 1 0	... 0 1 1	... 0 3
a b b	0 1 1	... 0 1 0 0	... 0 4
a b c	0 1 2	... 0 1 0 1	... 0 5
a a a a	0 0 0 0	... 0 0	... 0 0
a a a b	0 0 0 1	... 0 1	... 0 1
a a b a	0 0 1 0	... 0 1 0 0	... 0 4
a a b b	0 0 1 1	... 0 1 0 1	... 0 5
a a b c	0 0 1 2	... 0 1 1 0	... 0 6
a b a a	0 1 0 0	... 0 1 0 0 0 0	... 0 1 6
a b a b	0 1 0 1	... 0 1 0 0 0 1	... 0 1 7
a b a c	0 1 0 2	... 0 1 0 0 1 0	... 0 1 8
a b b a	0 1 1 0	... 0 1 0 1 0 0	... 0 2 0
a b b b	0 1 1 1	... 0 1 0 1 0 1	... 0 2 1
a b b c	0 1 1 2	... 0 1 0 1 1 0	... 0 2 2
a b c a	0 1 2 0	... 0 1 1 0 0 0	... 0 2 4
a b c b	0 1 2 1	... 0 1 1 0 0 1	... 0 2 5
a b c c	0 1 2 2	... 0 1 1 0 1 0	... 0 2 6
a b c d	0 1 2 3	... 0 1 1 0 1 1	... 0 2 7

Unter Berücksichtigung der spezifischen Eigenschaften von Dualität, Gleichheit und Ort lassen sich dann die Subzeichen der semiotischen Matrix (vgl. Bense 1975, S. 37 ff.), d.h. die dyadischen Peirce-Zahlen (vgl. Toth 2010) wie folgt auf die Tritozahlen für K = 4 abbilden.

1.1, 2.2, 3.3 → 0000
→ 0001
→ 0010
→ 0011
→ 0100
→ 0101
→ 0110

d.h. P^T (1.1) = P^T (2.2) = P^T (3.3) =

$$\begin{array}{lll}
1.2, 2.1, 1.3, 3.1 & \longrightarrow & 0111 \\
 & \searrow & 0012 \\
 & \searrow & 0102 \\
 & \searrow & 0112 \\
 & \searrow & 0120 \\
 & \searrow & 0121
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
2,3, 3.2 & \longrightarrow & 0122
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
? & \longrightarrow & 0123
\end{array}$$

Bis auf Dualität bijektiv ist also nur die Abbildung

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ 2.3 & & 3.2, & \end{tikzcd} \longrightarrow 0122$$

wobei X = (2.3 ∪ 3.2).

Dagegen bieten sich für die beiden dualen Paare (1.2, 2.1) und (1.3, 3.1) 6 Morphogramme an. Die größte Rechtsmehrdeutigkeit herrscht allerdings bei den 3 semiotischen Identitäten, die auf 7 Morphogramme abgebildet werden können. Am wesentlichsten ist jedoch das Ergebnis, daß auf das Morphogramm (0123) kein Subzeichen aus der semiotischen Matrix abbildbar ist. Dieses müßte wegen der 4 Werte des Morphogrammes eine Relation der Form $R = (x.y)$ mit $x \neq y$ und $x, y \in \mathbb{N}$ sein, d.h. R müsste Teilrelation einer mindestens tetradisch-tetratomischen Semiotik sein. Daraus folgt, daß für jede Semiotik der Form $S^{,x,x}$ mit $x \in (3, \ldots, n)$ gilt: $S^{,x,x} \subset S^{,(x+n),(x+n)}$ mit $n \in \mathbb{N}$.[1]

[1] Welche Konsequenzen dies für Semiotiken der Form $x \neq y$ hat, ist noch keineswegs abzusehen. Ihr Hauptproblem, das der Unvollständigkeit dualer Paare von Relationen wegen nicht-quadratischer Matrizen, fällt jedenfalls vermöge Trito-Äquivalenz weg.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Günther, Gotthard, Natural numbers in trans-classic systems, Part II. In: Journal of Cybernetics 1/3, 1971, S. 50-62

Rudolf Kaehr: "Zu einer Komplementarität in der Graphematik", www.vordenker.de http://www.vordenker.de/rk/rk_Komplementaritaet-in-der-Graphematik_2012.pdf

Schadach, Dieter, A classification of mappings. BCL Report No. 2/2, February 1, 1967

Toth, Alfred, Calculus semioticus. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

14.3.2021